Lösen von Rekursionen

Allgemein	Beispiel
Gegeben: Rekursion $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k\, a_{n-k}$ mit Konstanten $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{C}$ Startwerte $a_0, \dots, a_{k-1}$	$a_n = 2a_{n-1} - 5a_{n-2} \quad \forall\, n \geq 2$ $a_0 = 0,\ a_1 = 1.$ $x^n = 2x^{n-1} - 5x^{n-2} \mid : x^{n-2}$ $x^2 = 2x - 5 \iff x^2 - 2x + 5$
Schritt 1: Berechne die k Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ charakteristischen Polynom $x^k - c_1 x^{k-1} \dots - c_k$	Charakteristische Polynom: $x^2 - 2x + 5$ Nullstellen: $\alpha_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$ $\alpha_1 = 1+2i, \quad \alpha_2 = 1-2i$
Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ paarweise verschieden, dann ist die Lösung der Rekursion von der Form $a_n = \lambda_1 \cdot \alpha_1^n + \dots + \lambda_k \cdot \alpha_k^n$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$.	α_1, α_2 verschieden $\Rightarrow \quad a_n = \lambda_1 (1+2i)^n + \lambda_2 (1-2i)^n$
Kommt eine Nullstelle α doppelt vor, zum Beispiel $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, dann ist der zweite Summand nicht $\lambda_2 \cdot \alpha^n$, sondern $\lambda_2 \cdot n^1 \cdot \alpha^n$. Bei $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ ist der dritte Summand $\lambda_3 \cdot n^2 \cdot \alpha^n$ usw.	Wie sähe die allgemeine Lösung aus, wenn das charakteristische Polynom die Nullstellen $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 1,\ \alpha_4 = 2,\ \alpha_5 = 2$ hat? $a_n = \lambda_1 1^n + \lambda_2 2^n + \lambda_3 \cdot n \cdot 1^n + \lambda_4 \cdot n \cdot 2^n + \lambda_5 \cdot n^2 \cdot 2^n$

Schritt 2: Nutze die gegebenen Startwerte $a_0, \dots, a_{n-1}$, um ein Gleichungssystem für $\lambda_1, \dots \lambda_k$ aufzustellen und diese zu bestimmen

$$0 = a_0 = \lambda_1 \cdot (1+2i)^0 + \lambda_2 \cdot (1-2i)^0$$

$$1 = a_1 = \lambda_1 (1+2i)^1 + \lambda_2 \cdot (1-2i)^1$$

$$0 = \lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2$$

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 (1+2i) + \lambda_2 \cdot (1-2i) \\ &= -\lambda_2 (1+2i) + \lambda_2 \cdot (1-2i) \\ &= -4i \lambda_2 \end{aligned}$$

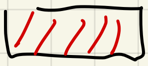
$$\Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{4i}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{4i}$$

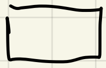
$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{4i} \cdot (1+2i)^n - \frac{1}{4i} (1-2i)^n$$

Aufgabe 1: Löse die Rekursion $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad \forall n \geq 2$

$a_0 = 1, \ a_1 = 2$

$$a_n = \frac{1}{4} (-1)^n + \frac{3}{4} 3^n$$





$$a_3 = 1 \cdot a_2 + 5 \cdot a_1 + 3 \cdot a_0$$

Aufgabe 2: Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein $1 \times n$ Feld zu pakettieren, wenn man
- 1×3 Fliesen in 3 unterschiedlichen Farben
- 1×2 Fliesen in 5 unterschiedlichen Farben
- 1×1 Fliesen in einer Farbe zur Verfügung hat?

zum Beispiel ist bei $n = 3$ die Antwort $3 + 5 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 1 = 14$

$$a_n = a_{n-1} + 5 \cdot a_{n-2} + 3 \cdot a_{n-3}$$

$a_1 = 1, \quad a_2 = 6, \quad a_3 = 14$

$a_0 = 1$

$(x^3 - x^2 - 5x - 3) : (x+1) = (x^2 - 2x - 3)$

$\underline{x^3 + x^2}$

$-2x^2 - 5x - 3$

$\underline{-2x^2 - 2x}$

$-3x - 3$

$1 \pm \sqrt{1+3} = 3$

-1

$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = -1, \quad \alpha_3 = 3$

$$a_n = \lambda_1 \cdot (-1)^n + \lambda_2 \cdot n (-1)^n + \lambda_3 \cdot 3^n$$

- $1 = a_0 = \lambda_1 \cdot (-1)^0 + \lambda_2 \cdot 0 \cdot (-1)^0 + \lambda_3 \cdot 3^0$
-
-